

Analyse du paradoxe des jumeaux en relativité restreinte

Rév. 2.0

Septembre 2010

Alain Bernard

Le paradoxe des jumeaux

Caractère relatif de l'accélération en cinématique newtonienne

En cinématique newtonienne, lorsque que deux corps sont en accélération l'un par rapport à l'autre, il n'existe pas de critère cinématique permettant de privilégier un repère plutôt qu'un autre. Il est tout aussi valable de considérer que l'un est au repos et l'autre en accélération que le contraire.

Le physicien dispose lui d'expériences physiques lui permettant de trancher.

Caractère absolu de l'accélération en cinématique de Lorentz

L'accélération d'un objet relativement à un référentiel inertiel donné est décrite par un changement de vitesse durant un intervalle de temps, ces deux valeurs étant mesurées dans le référentiel inertiel choisi.

Les équations de Lorentz transforment ces valeurs mais ne les annulent pas. L'objet accélère donc par rapport à tous les référentiels inertiels possibles.

L'accélération est ainsi un phénomène absolu en cinématique de Lorentz

Le terme absolu doit être compris « relativement à la structure des référentiels inertiels choisis préalablement ».

Cela ne signifie pas qu'un objet accélère de manière identique mais que l'objet est animé d'un mouvement accéléré dans tout référentiel inertiel

Résolution du paradoxe des jumeaux

Rappelons que le caractère paradoxal de l'histoire des jumeaux apparaît dès lors que l'on se demande pourquoi privilégier le point de vue du jumeau sédentaire et non le point de vue a priori symétrique du voyageur pour qui c'est la terre qui s'éloigne, fait demi-tour et revient.

Comme on vient d'indiquer que l'accélération est absolue d'un point de vue cinématique, il y a bien un jumeau qui accélère « dans l'absolu » et un qui reste dans un référentiel inertiel. Notre intuition newtonienne de symétrie nous a trompés : le point de vue des jumeaux n'est pas interchangeable.

Commentaire

Cette résolution cinématique s'oppose à la résolution classique qui fait appel à des expériences de physiques pour déterminer lequel des jumeaux effectue réellement une accélération.

On pourrait objecter que cette résolution s'appuyant sur la donnée a priori d'une structure de référentiels inertiels, aucun des deux jumeaux n'a les moyens de savoir s'il se trouve dans une structure plutôt qu'une autre.

Certes, mais dans la mesure où l'histoire des jumeaux a une conclusion (tel jumeau est plus jeune que l'autre), l'énoncé contient l'hypothèse implicite selon laquelle on se place dans une structure de référentiels inertiels donnée.

En assimilant l'accélération d'un objet à un saut instantané d'un référentiel inertiel à un autre, nous allons ainsi mettre en évidence une fonction purement cinématique permettant à chaque jumeau de se rendre compte qu'il accélère en se fondant sur l'évolution de l'âge de son frère.

Espace de Mach

Un observateur isolé de toute matière ne peut savoir s'il est en accélération ou s'il tourne sur lui-même. Ce constat reste vrai avec la résolution proposée pour le paradoxe. En effet, la fonction cinématique qui permet à un observateur de détecter qu'il est en accélération s'appuie sur la présence d'un autre observateur. Sans cela, il ne peut pas savoir quel est son mouvement.

Définitions / rappels

Référentiel inertiel

Cette analyse se place dans un espace d'événements doté d'un système de référence inertiel ou référentiel galiléen permettant de repérer tout événement avec une coordonnée de temps et des coordonnées spatiales.

Les équations de Lorentz permettent de transformer les coordonnées d'un événement d'un référentiel inertiel dans un autre référentiel inertiel.

Pour des raisons de simplification, on ne considère ici qu'une seule dimension d'espace, ce qui permet d'utiliser les diagrammes de Minkowski.

Ligne d'univers, âge

On appelle ligne univers d'un objet l'ensemble des événements constituant l'histoire de l'objet.

On peut considérer qu'à tout événement de sa ligne d'univers, l'objet a un âge déterminé.

A tout âge d'un objet correspond un événement unique et réciproquement.

Comparaison des âges

La comparaison des âges de deux objets n'a de signification qu'aux événements intersections de leurs lignes d'univers respectives.

Le temps est homogène entre les lignes d'univers : la comparaison des âges de deux objets à une signification.

Référentiel inertiel tangent

Le référentiel inertiel tangent (Figure 1) d'un objet à un âge t donné est le référentiel inertiel vérifiant les deux propriétés suivantes :

- L'événement correspondant à « objet d'âge t » a pour coordonnées $(t, 0)$. Autrement dit, il se trouve sur l'axe temps du référentiel inertiel tangent à l'ordonnée t .
- L'objet considéré est au repos. Autrement dit, le référentiel tangent est animé de la vitesse v de l'objet considéré relativement à un référentiel inertiel pris comme référence.

Les équations de Lorentz montrent que le référentiel inertiel tangent ne dépend pas du référentiel inertiel choisi pour représenter la ligne d'univers de l'objet.

Un objet animé d'une vitesse uniforme par rapport à un référentiel inertiel conserve le même référentiel tangent.

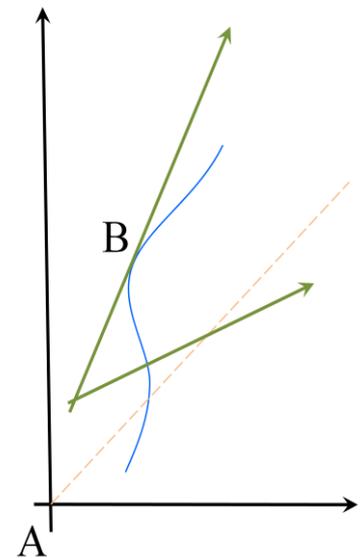


Figure 1 – Référentiel inertiel tangent

Accélération

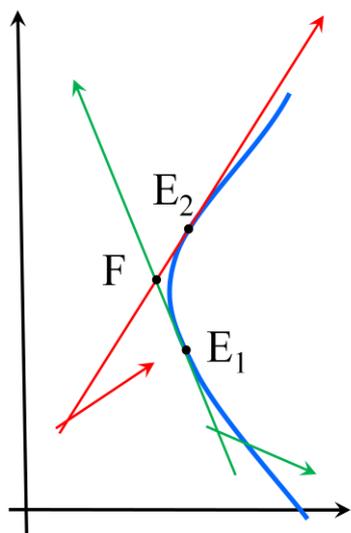


Figure 2 – Accélération assimilée à un changement instantané de repère inertiel

Les référentiels tangents avant et après l'intervalle de temps considéré sont différents puisque la vitesse a changé du fait de l'accélération.

Dans cette analyse, nous allons considérer qu'une accélération est un changement instantané de vitesse et donc assimilable mathématiquement à un changement de référentiel inertiel se situant à un événement précis.

Sur la Figure 2, l'objet étudié s'est déplacé de l'événement E_1 à l'événement E_2 durant un intervalle de temps dans le référentiel inertiel choisi pour représenter la ligne d'univers. Ce mouvement peut être assimilé aux deux déplacements de translation uniforme E_1F et FE_2 . On peut ainsi considérer que l'objet est immobile dans le premier référentiel tangent et devient immobile sur le second référentiel tangent au point F .

Une accélération « réelle » continue quelconque peut ainsi être représentée aussi précisément que voulu par une succession d'accéléérations instantanées.

Il faut noter que le trajet E_1E_2 ne représente pas le même intervalle de temps que le trajet approché et donc en toute rigueur le changement instantané de référentiel inertiel devrait se faire avec un léger changement d'âge pour l'objet.

Dans la suite du document, nous ne nous intéressons qu'aux changements instantanés de référentiel inertiel.

Notons qu'une autre manière d'indiquer que l'accélération est un phénomène absolu en cinématique de Lorentz est de remarquer qu'un changement de repère reste un changement de repère relativement à tout référentiel inertiel.

La fonction AGE

Âge parallèle

On appelle « âge parallèle » à l'instant T d'un objet relativement à un référentiel inertiel $[R]$, l'âge de l'objet à l'événement se trouvant à l'intersection de sa ligne d'univers et de l'axe $t=T$ du référentiel.

On note cette valeur : $AGEP([R], T, O)$.

La fonction AGE

Notons $O(t)$ l'événement correspondant à « O est âgé de l'âge t ».

Considérons deux observateurs A et B . Pour chaque âge a de A , on peut calculer l'âge parallèle :

$$AGEP([A(a)], a, B)$$

Où $[A(a)]$ désigne le référentiel inertiel tangent de A à l'âge a .

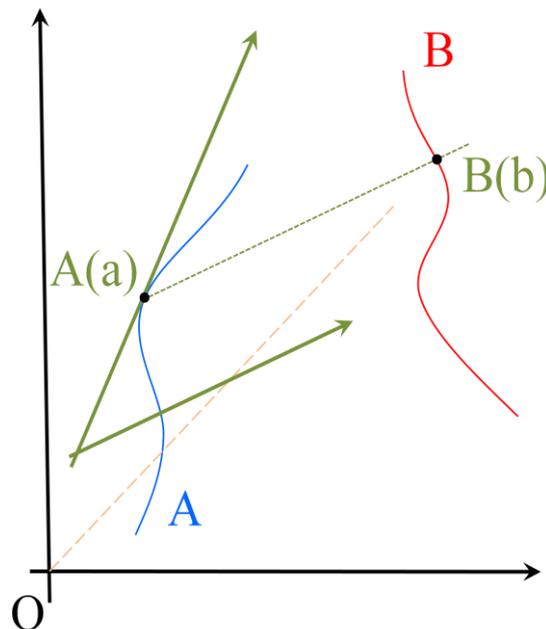


Figure 3 – A tout âge de A , on considère son référentiel inertiel tangent. La ligne univers coupant l'axe de simultanéité à un point événement de la ligne d'univers de B qui nous donne « l'âge parallèle » de B . Cette fonction n'est pas symétrique en général

On note $AGE_A(B)$ la fonction qui a tout a associe $b = AGEP([A(a)], a, B)$.

Le référentiel inertiel tangent ne dépendant pas du référentiel choisi pour la représentation, la fonction $AGE_A(B)$ ne dépend que des lignes univers de A et de B indépendamment du référentiel choisi pour les représenter.

La fonction AGE entre deux observateurs en translation uniforme

Dans le cas de deux observateurs chacun au repos dans un référentiel inertiel, la fonction AGE est très simple à calculer : c'est une droite de pente $\frac{1}{\gamma}$ où γ est calculé à partir de la vitesse relative entre les deux corps considérés. On a ici une situation parfaitement symétrique avec :

$$AGE_A(B) = AGE_B(A) + \text{constante}$$

La constante dépendant des origines d'âge choisies pour chaque observateur.

La fonction AGE lors d'un changement de repère

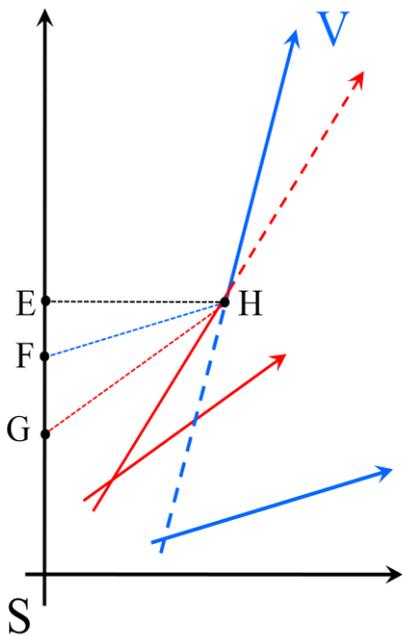


Figure 4 – Les points remarquables lors pour les fonctions AGE lors d'un changement de repère

Considérons un observateur S, dit sédentaire, au repos dans un référentiel inertiel et un observateur V, dit voyageur, effectuant un changement de repère inertiel. Le diagramme est donné sur la Figure 4.

Nous choisissons comme référentiel inertiel de représentation, le référentiel R[S] où S est au repos.

Avant et après le changement de repère, les fonctions $AGE_V(F)$ et $AGE_F(V)$ sont des droites de pentes $\frac{1}{\gamma^1}$ et $\frac{1}{\gamma^2}$.

Examinons ce qui se passe au point événement H où l'observateur V change de repère inertiel.

L'événement H se trouve sur l'axe de simultanéité de S au point E. Dans le référentiel inertiel de S, juste avant et juste après E, l'observateur V a à peu près le même âge.

La fonction $AGE_F(V)$ est donc continue au point événement E.

Pour V, juste avant le changement de repère en H, l'âge de S est donné au point événement G. Juste après c'est au point F. Il y a donc une discontinuité dans la fonction $AGE_V(F)$ au point d'accélération H.

Les deux fonctions sont représentées sur le graphique de la Figure 5. Comme prévu, la courbe représentative de $AGE_S(V)$ est continue. Elle présente un angle au point correspondant à l'événement E.

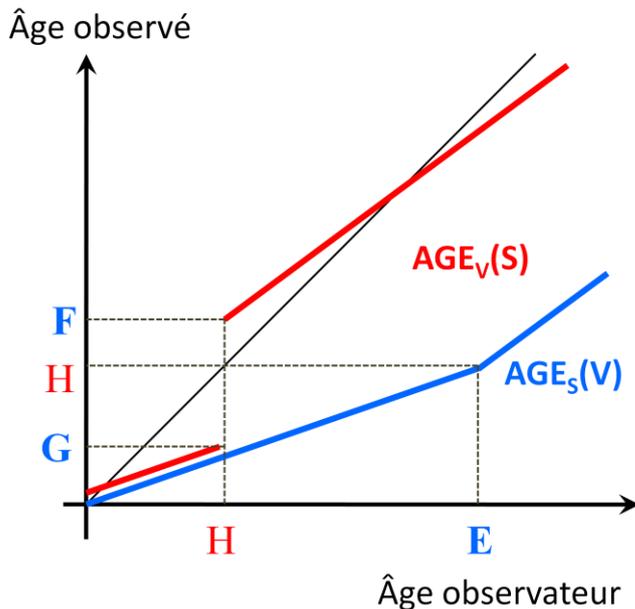


Figure 5 – Les fonctions $AGE_V(F)$ et $AGE_F(V)$. Les points remarquables de la Figure 4 sont reportés sur les axes.

De son côté, la courbe $AGE_V(S)$ représentative du « point de vue » du voyageur connaît une discontinuité au point événement où il change de repère. L'âge parallèle de S passe instantanément de l'âge en G à l'âge en F.

On note bien que avant et chaque point remarquable, les deux courbes sont des droites de pentes égales montrant bien qu'en dehors de l'événement de changement de repère, la fonction AGE ne permet pas de privilégier un point de vue plutôt qu'un autre.

La fonction AGE et le paradoxe des jumeaux

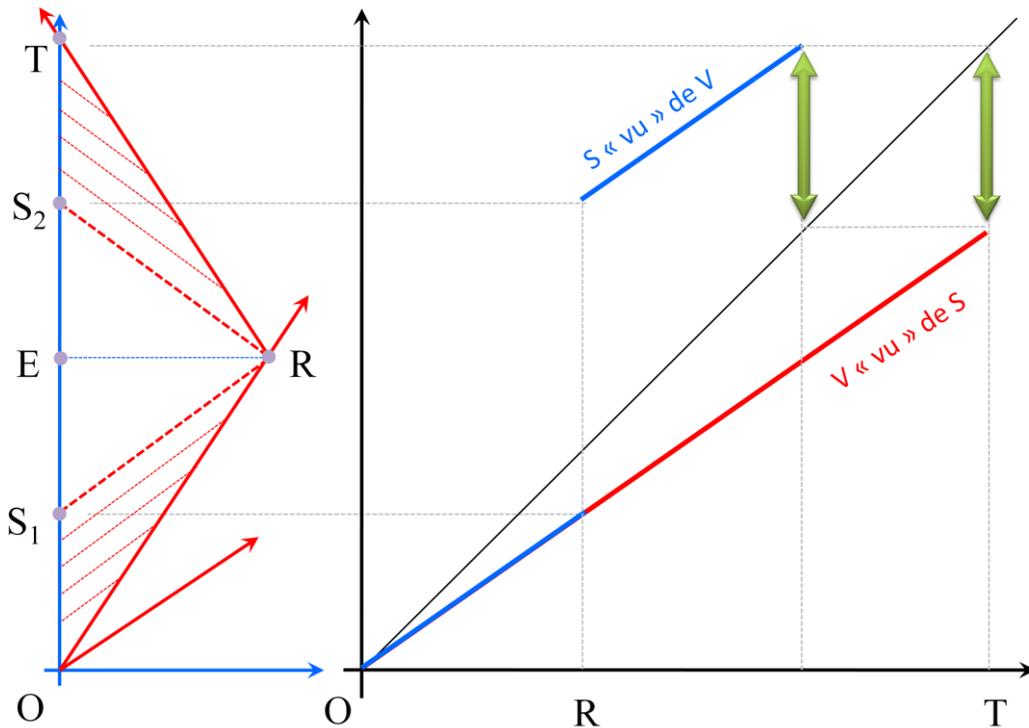


Figure 6 – Les fonctions AGE dans le parcours des jumeaux. Sur la gauche est représenté le diagramme de Minkowski du paradoxe. Le graphique temps de droite prend l'échelle du référentiel fixe de gauche. Pour le jumeau sédentaire, le voyageur vieillit de manière constante, sans discontinuité. Pour le voyageur, au moment du demi-tour, l'âge parallèle du sédentaire augmente d'un seul coup et passe au dessus de la première diagonale. A l'arrivée, le sédentaire est plus vieux que lui comme prévu.

Le graphique de la Figure 6 montre bien la discontinuité de la fonction $AGE_V(F)$ au point de demi-tour. On remarque bien qu'en dehors de cette discontinuité, les courbes sont des droites de pente identique. La discontinuité dans la fonction AGE du voyageur fait que le sédentaire devient subitement plus vieux que lui. Il se remet ensuite à vieillir moins vite. Au point de rencontre, le sédentaire est plus vieux que lui, la différence étant (heureusement) la même que celle que constante le sédentaire sur sa courbe AGE.

Rappelons que la comparaison des âges n'a de sens qu'aux événements communs aux deux observateurs. En dehors de ces événements, la fonction AGE est un choix de comparaison permettant à l'observateur de détecter qu'il change de repère inertiel.

La fonction AGE permet ainsi à chaque jumeau de savoir si c'est lui qui fait demi-tour ou non. Les points de vue ne sont pas symétriques.

Cas de l'accélération continue

Rappelons que la discontinuité apparaît parce qu'on a fait le choix de travailler sur des changements instantanés de repère inertiel. Si l'on souhaite étudier le phénomène d'accélération continue, la discontinuité disparaît. L'étude des caractéristiques de la fonction AGE lors d'une accélération n'est pas faite ici. Il est peut-être nécessaire de bâtir une autre fonction cinématique, par exemple celle de la vitesse perçue.

Dans le cas des jumeaux, la fonction AGE permet toujours à chaque jumeau de trancher puisque pour le voyageur, la courbe passe au dessus de la première diagonale.